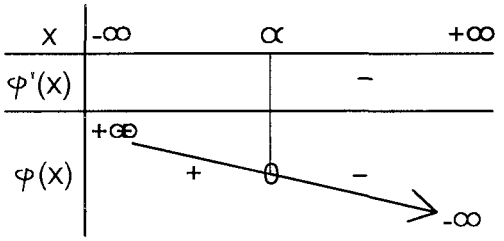
D'où le tableau de variation de φ



- $\lim\limits_{-\infty} \varphi = \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - x] = 0 - (-\infty) = +\infty$
- $\lim\limits_{+\infty} \varphi = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = -\infty.$

⊗ φ est continue et strictement ↘ sur IR

⇒ φ réalise une bijection de IR dans φ(IR) = IR ∋ 0

⇒ il existe un réel unique α tel que φ(α) = 0

$\odot\varphi(\text{Log}2) = \frac{2}{\sqrt{5}} - \text{Log}2 > 0$ $\quad \odot\varphi(1) = \frac{e}{\sqrt{1+e^2}} - 1 < 0$

$\varphi(\text{Log}2) > \varphi(\alpha) > \varphi(1)$

⇒ $\text{Log}2 < \alpha < 1$. car φ ↘ sur IR.

2/ $I = \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha} \text{Log}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)dx.$

$$\begin{pmatrix} u'(x) = 1 & \curvearrowright & u(x) = x \\ v(x) = \text{Log}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) & \curvearrowright & v'(x) = \frac{2}{x(1-x^2)} \end{pmatrix}$$

$$I = \frac{1}{2}\left[x\text{Log}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha} - \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha} \frac{2}{1-x^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\alpha\text{Log}\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\right) - \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\alpha\text{Log}\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\right) - \frac{1}{2}[-\text{Log}(1-x) + \text{Log}(1+x)]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\alpha\text{Log}\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\right) - \frac{1}{2}\left[\text{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}$$

On remarque que $\frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\right) = g(\alpha) = \alpha$ car $f(\alpha) = \alpha$

puisque $\varphi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) - \alpha = 0$.

On trouve enfin que $I = \alpha^2 - \frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) + \text{Log}\left(\sqrt{2}+1\right)$.

b- La partie K est la réunion de deux parties D et D′ avec

D limité par C_f, Δ, Δ_1 : $x = 0$ et Δ_2 : $x = \alpha$

D′ limitée par $C_{f^{-1}}, \Delta, \Delta_1'$: $y = 0$ et Δ_2 : $x = \alpha$

De plus $D' = S_\Delta(D) \Rightarrow \mathcal{A}ir(D) = \mathcal{A}ir(D')$

D'où $\mathcal{A}ir(K) = 2\mathcal{A}ir(D')$.

Soient les points $A(\alpha; 0)$ et $B(\alpha; \alpha)$. Soit la partie D″ du plan